I–1. Feladat

Határozd meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f\big(xf(y) + 2y\big) = f(xy) + xf(y) + f\big(f(y)\big)$$

teljesül minden x és y valós számra.

I–2. Feladat

Legyen $n \geq 3$ egész szám. Azt mondjuk, hogy a konvex $A_1A_2\ldots A_n$ sokszög A_i ($1 \leq i \leq n$) csúcsa *bohém*, ha A_i tükörképe az $A_{i-1}A_{i+1}$ szakasz felezőpontjára az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszögnek a belsejébe vagy a határára esik (ahol $A_0 = A_n$ és $A_{n+1} = A_1$). Határozd meg a lehető legkisebb számot, amennyi bohém csúcsa lehet egy konvex n-szögnek (n függvényében).

(A konvex $A_1A_2\ldots A_n$ sokszögnek n csúcsa van, és az összes belső szöge kisebb, mint $180°$.)

I–3. Feladat

Legyen ABC olyan hegyesszögű háromszög, melyre $AC > BC$, a körülírt köre pedig legyen ω. Tegyük fel, hogy P olyan pont az ω körön, melyre $AP = AC$, és P a rövidebb BC ív belső pontja. Legyen Q az AP és BC egyenesek metszéspontja. Tegyük fel továbbá, hogy R olyan pont az ω körön, melyre $QA = QR$, és R a rövidebb AC ív belső pontja. Végül legyen S a BC egyenes és az AB oldalfelező merőlegesének a metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy a P, Q, R és S pontok egy körön helyezkednek el.

I–4. Feladat

Határozd meg a legkisebb pozitív egész n számot, amelyre a következő állítás igaz: bármely n egymást követő egész szám közül ki lehet választani néhány (legalább egy) egymást követő egész számot úgy, hogy az összegük osztható 2019-cel.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.